

ÇALIŞMA SORULARI-1

1. Verilen her bir fonksiyonun verilen diferensiyel denklemin bir çözümü olduğunu yerine koyarak gerçekleyiniz.

a. $y'' - 9y = 0$; $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-3x}$

b. $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y_1 = e^x \cos x$, $y_2 = e^{-x} \sin x$

c. $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$; $y_1 = \frac{1}{x^2}$, $y_2 = \frac{\ln x}{x^2}$

d. $y' + 2xy^2 = 0$; $y = \frac{1}{1+x^2}$

e. $x^2 y'' + xy' - y = \ln x$; $y_1 = x - \ln x$, $y_2 = \frac{1}{x} - \ln x$

2. Verilen diferensiyel denklemi ve verilen başlangıç koşulunu sağlayan bir $y = f(x)$ fonksiyonu bulunuz.

a. $\frac{dy}{dx} = (x-2)^2$; $y(2) = 1$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$; $y(2) = -1$

c. $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{x^2+9}$; $y(-4) = 0$

d. $\frac{dy}{dx} = \frac{10}{x^2+1}$; $y(0) = 0$

e. $\frac{dy}{dx} = \cos 2x$; $y(0) = 1$

3. Başlangıç değer problemlerinin açık çözümlerini bulunuz. (İpucu: Değişkenlerine ayrılabilir)

a. $\frac{dy}{dx} = 3x^2(y^2+1)$; $y(0) = 1$

b. $(\tan x) \frac{dy}{dx} = y$; $y(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\pi$

c. $x \frac{dy}{dx} - y = 2x^2 y$; $y(1) = 1$

d. $\frac{dy}{dx} = 2xy^2 + 3x^2 y^2$; $y(1) = -1$

4. Diferensiyel denklemlerin (Değişkenlerine ayrılabilir) genel çözümlerini (gerekliyse kapalı, uygunsa açık) bulunuz.

a. $\frac{dy}{dx} = 2x \sec y$

b. $y^3 \frac{dy}{dx} = (y^4 + 1) \cos x$

c. $x^2 \frac{dy}{dx} = 1 - x^2 + y^2 - x^2 y^2$

d. $x \frac{dv}{dx} = \frac{1-4v^2}{3v}$

e. $y^{-1} dy + ye^{\cos x} \sin x dx = 0$

f. $(x + xy^2) dx + e^{x^2} y dy = 0$

g. $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{xe^{t+2x}}$

5. Verilen birinci merteye lineer diferensiyel denklemlerin genel çözümlerini bulunuz. Eğer bir başlangıç koşulu verilmişse, bir özel çözümünü bulunuz.

a. $\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} = x \cos x, x > 0$ (C: $y = x^2 \sin x + Cx^2$)

b. $t^2 \frac{dx}{dt} + 3tx = t^4 \ln t + 1; x(1) = 0$ (C: $x = \frac{t^3}{6} \ln t - \frac{t^3}{36} + \frac{1}{2t} - \frac{17}{36t^3}$)

c. $\sin x \frac{dy}{dx} + y \cos x = x \sin x; y(\frac{\pi}{2}) = 2$

d. $x \frac{dv}{dx} + 3v + 2x = 3x^2; v(1) = 1$

e. $x \frac{dy}{dx} + 3(y + x^2) = \frac{\sin x}{x}$

f. $(1 - x^2) \frac{dy}{dx} - x^2 y = (1 + x) \sqrt{1 - x^2}$

g. $(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + xy - x = 0,$ (C: $y = 1 + C(x^2 + 1)^{-1/2}$)

6. Verilen diferensiyel denklemlerin tam olduğunu gerçekleyiniz ve sonra çözünüz.

a. $(1 + e^x y + x e^x y) dx + (x e^x + 2) dy = 0$ (C: $F(x, y) = x e^x y + 2y + x = C$)

b. $(2xy - \sec^2 x) dx + (x^2 + 2y) dy = 0$ (C: $F(x, y) = x^2 y - \tan x + y^2 = C$)

c. $\left(\frac{1}{x} + 2y^2 x\right) dx + (2yx^2 - \cos y) dy = 0; y(1) = \pi, x > 0$ (C: $\ln x + x^2 y^2 - \sin y = \pi^2$)

d. $(e^t y + t e^t y) dt + (t e^t + 2) dy = 0; y(0) = -1$ (C: $y = -2 / (t e^t + 2)$)

e. $(\cos x \cos y + 2x) dx - (\sin x \sin y + 2y) dy = 0$ (C: $F(x, y) = \sin x \cos y + x^2 - y^2 = C$)

f. $(2xy + 3) dx + (x^2 - 1) dy = 0$

g. $\left(\frac{2x^{5/2} - 3y^{5/3}}{2x^{5/2} y^{2/3}}\right) dx + \left(\frac{3y^{5/3} - 2x^{5/2}}{3x^{3/2} y^{5/3}}\right) dy = 0$

7. $(y^2 + 2xy) dx - x^2 dy = 0$ denkleminin

a) tam diferensiyel denklem olmadığını gösteriniz.

b) her iki tarafı y^{-2} ile çarparak elde edilecek olan yeni denklemin tam diferensiyel denklem olduğunu gösteriniz.

c) Son olarak elde edilen tam diferensiyel denklemin çözümünden faydalanarak, orijinal denklemini çözünüz.

8. $M(x, y) dx + \left(\sec^2 y - \frac{x}{y}\right) dy = 0$ denklemini tam diferensiyel denklem yapacak olan $M(x, y)$ fonksiyonunu bulunuz.

9. $(y e^{-xy} - 4x^3 y + 2) dx + N(x, y) dy = 0$ denklemini tam diferensiyel denklem yapacak olan $N(x, y)$ fonksiyonunu bulunuz.

10. Verilen Bernoulli diferensiyel denklemlerini çözünüz.

a. $\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2} x y^3;$ (C: $y^{-2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + C e^{-10x}$)

- b. $\frac{dx}{dt} + tx^3 + \frac{x}{t} = 0;$ (C: $x^{-2} = 2t^2 \ln|t| + Ct^2$)
- c. $\frac{dy}{dx} + y^3x + y = 0$
- d. $2xy' + y^3e^{-2x} = 2xy$
- e. $3xy^2y' = 3x^4 + y^3$ (C: $y(x) = (x^4 + Cx)^{1/3}$)
- f. $y' = y + y^3$
- g. $y^2(xy' + y)(1 + x^4)^{1/2} = x$

11. Verilen diferansiyel denklemlerini uygun deęişken deęiřtirme yöntemi ile çözüünüz.

- a. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 + x^2}{x^2};$ C: $y = x \tan(\ln|x| + C)$
- b. $\frac{dy}{dx} = y - x - 1 + (x - y + 2)^{-1};$ C: $(x - y + 2)^2 = Ce^{2x} + 1$ (ipucu: $u = x - y$)
- c. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{3xy}$
- d. $\frac{dy}{dx} = \frac{y(\ln y - \ln x + 1)}{x}$ (ipucu: $\ln y - \ln x = \ln \frac{y}{x}$)
- e. $\frac{dy}{dx} = \sin(x - y)$
- f. $\frac{dy}{dx} = (x - y + 5)^2$
- g. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x + y} - 1$ C: $y = (x + C)^2 / 4 - x$

12. İndirgenabilir ikinci mertebe diferansiyel denklemleri çözüünüz.

- a. $y^3y'' = 1$
- b. $y'' = 4yy'$
- c. $yy'' = 2(y')^2$
- d. $xy'' + y' = 4x$
- e. $y'' + 9y = 0$